

1.8 Естествена дедукция

Задачи към тема „1.8 Естествена дедукция“

(1) Докажете валидността на следните изводи с естествена дедукция:

- | | | | |
|----|--|-----|--|
| 1) | 1. $A \rightarrow C$
2. $D \vee (A \wedge B)$
3. $\neg D$ / C | 2) | 1. $I \rightarrow J$
2. $J \vee (I \vee K)$
3. $J \rightarrow M$
4. $\neg M$
5. $K \rightarrow \neg N$ / $\neg N$ |
| 3) | 1. $A \rightarrow C$
2. $C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
3. $\neg B$
4. $\neg D \rightarrow [D \vee \neg(A \leftrightarrow B)]$
5. $D \rightarrow B$ / $\neg A \wedge \neg B$ | 4) | 1. $A \rightarrow B$
2. $(A \wedge B) \rightarrow (\neg \neg C \wedge \neg D)$
3. $\neg E \rightarrow \neg C$
4. A
5. $\neg \neg E \rightarrow F$ / $F \vee (\neg A \leftrightarrow \neg B)$ |
| 5) | 1. $F \rightarrow G$
2. $\neg(F \wedge G) \wedge L$
3. $(G \vee H) \rightarrow (I \wedge J)$
4. $F \vee (K \vee G)$
5. $\neg K \wedge L$ / $I \vee H$ | 6) | 1. $(A \vee B) \wedge C$
2. $A \rightarrow D$
3. $B \rightarrow E$
4. $E \rightarrow F$ / $D \vee F$ |
| 7) | 1. $Q \rightarrow (V \vee R)$
2. $T \rightarrow \neg U$
3. $\neg V$
4. $T \vee Q$
5. $\neg U \rightarrow V$ / R | 8) | 1. $\neg S \rightarrow (N \vee O)$
2. $(N \rightarrow U) \wedge (P \rightarrow T)$
3. $(O \rightarrow T) \wedge (P \rightarrow N)$
4. $\neg U$
5. $S \rightarrow U$ / T |
| 9) | 1. $A \rightarrow B$
2. $\neg B$
3. $[(\neg A \wedge \neg B) \vee C] \rightarrow (B \vee D)$ / $D \vee \neg E$ | 10) | 1. $(Q \vee R) \rightarrow [(S \vee L) \rightarrow \neg T]$
2. $(S \vee U) \rightarrow Q$
3. $S \wedge \neg U$
4. $T \vee K$ / K |

(2) За всяка от стъпките в следните доказателства с естествена дедукция определете от кои редове и по кое правило са получени:

- | | | | |
|----|--|----|---|
| 1) | 1. $A \vee \neg B$
2. $\neg C \rightarrow \neg A$ / $B \rightarrow C$
3. $\neg B \vee A$
4. $B \rightarrow A$
5. $A \rightarrow C$
6. $B \rightarrow C$ | 2) | 1. $P \rightarrow \neg P$
2. $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$ / R
3. $\neg P \vee \neg P$
4. $\neg P$
5. $\neg P \vee \neg Q$
6. $\neg(P \wedge Q)$
7. $R \wedge S$
8. R |
|----|--|----|---|

1.8 Естествена дедукция

- 3) 1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
 2. $(\neg C \vee \neg D) \vee F$
 3. $\neg E \rightarrow (D \wedge \neg F)$ / $A \rightarrow (B \rightarrow E)$
 4. $(A \wedge B) \rightarrow C$
 5. $\neg(C \wedge D) \vee F$
 6. $(C \wedge D) \rightarrow F$
 7. $C \rightarrow (D \rightarrow F)$
 8. $(A \wedge B) \rightarrow (D \rightarrow F)$
 9. $\neg(D \wedge \neg F) \rightarrow \neg \neg E$
 10. $\neg(D \wedge \neg F) \rightarrow E$
 11. $(\neg D \vee \neg \neg F) \rightarrow E$
 12. $(\neg D \vee F) \rightarrow E$
 13. $(D \rightarrow F) \rightarrow E$
 14. $(A \wedge B) \rightarrow E$
 15. $A \rightarrow (B \rightarrow E)$

- 5) 1. $P \rightarrow R$
 2. $(T \rightarrow \neg S) \rightarrow \neg R$ / $P \rightarrow T$
 3. $\neg \neg R \rightarrow \neg(T \rightarrow \neg S)$
 4. $R \rightarrow \neg(T \rightarrow \neg S)$
 5. $\neg R \vee \neg(T \rightarrow \neg S)$
 6. $\neg R \vee \neg(\neg T \vee \neg S)$
 7. $\neg R \vee (\neg \neg T \wedge \neg \neg S)$
 8. $\neg R \vee (T \wedge \neg \neg S)$
 9. $\neg R \vee (T \wedge S)$
 10. $(\neg R \vee T) \wedge (\neg R \vee S)$
 11. $\neg R \vee T$
 12. $R \rightarrow T$
 13. $P \rightarrow T$

- 4) 1. $K \rightarrow L$
 2. $M \rightarrow L$
 3. $N \rightarrow [K \vee (K \vee M)]$
 4. N / L
 5. $K \vee (K \vee M)$
 6. $(K \vee K) \vee M$
 7. $K \vee M$
 8. $(K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow L)$
 9. $L \vee L$
 10. L

- 6) 1. $[O \rightarrow (P \wedge Q)] \wedge [R \rightarrow (P \wedge S)]$
 2. $[(T \rightarrow \neg O) \wedge U] \rightarrow X$
 3. $(U \rightarrow X) \rightarrow (T \wedge R)$ / $Q \vee S$
 4. $(T \rightarrow \neg O) \rightarrow (U \rightarrow X)$
 5. $(T \rightarrow \neg O) \rightarrow (T \wedge R)$
 6. $\neg(T \rightarrow \neg O) \vee (T \wedge R)$
 7. $\neg(\neg T \vee \neg O) \vee (T \wedge R)$
 8. $(\neg \neg T \wedge \neg \neg O) \vee (T \wedge R)$
 9. $(T \wedge O) \vee (T \wedge R)$
 10. $T \wedge (O \vee R)$
 11. $(O \vee R) \wedge T$
 12. $O \vee R$
 13. $(P \wedge Q) \vee (P \wedge S)$
 14. $P \wedge (Q \vee S)$
 15. $(Q \vee S) \wedge P$
 16. $Q \vee S$

1.8 Естествена дедукция

- | | | | |
|----|---|----|--|
| 7) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $P \leftrightarrow \neg Q$ 2. $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow P)$ 3. $S \rightarrow Q \quad / \quad Q$ 4. $(P \rightarrow \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)$ 5. $P \rightarrow \neg Q$ 6. $\neg \neg Q \rightarrow \neg P$ 7. $Q \rightarrow \neg P$ 8. $S \rightarrow \neg P$ 9. $P \rightarrow S$ 10. $P \rightarrow \neg P$ 11. $\neg P \vee \neg P$ 12. $\neg P$ 13. $(\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow \neg Q)$ 14. $\neg Q \rightarrow P$ 15. $\neg \neg Q$ 16. Q | 8) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $A \rightarrow (C \vee \neg B)$ 2. $(B \wedge C) \rightarrow (A \wedge D)$ 3. $B \quad / \quad A \leftrightarrow C$ 4. $A \rightarrow (\neg B \vee C)$ 5. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 6. $(A \wedge B) \rightarrow C$ 7. $(B \wedge A) \rightarrow C$ 8. $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ 9. $A \rightarrow C$ 10. $B \rightarrow [C \rightarrow (A \wedge D)]$ 11. $C \rightarrow (A \wedge D)$ 12. $\neg C \vee (A \wedge D)$ 13. $(\neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee D)$ 14. $\neg C \vee A$ 15. $C \rightarrow A$ 16. $(A \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow A)$ 17. $A \leftrightarrow C$ |
|----|---|----|--|

(3) Докажете валидността на следните изводи с естествена дедукция:

- | | | | |
|----|--|-----|---|
| 1) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $W \rightarrow M$ 2. $\neg W \rightarrow E \quad / \quad M \vee E$ | 2) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $(R \rightarrow S) \wedge (P \rightarrow Q)$ 2. $(S \wedge Q) \rightarrow O$ 3. $\neg O \quad / \quad \neg R \vee \neg P$ |
| 3) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$ 2. $C \rightarrow E$ 3. $\neg E \quad / \quad \neg A$ | 4) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $K \rightarrow L$ 2. $K \rightarrow M \quad / \quad (\neg L \vee \neg M) \rightarrow \neg K$ |
| 5) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $(L \wedge M) \rightarrow N$ 2. $(L \wedge \neg M) \rightarrow \neg N \quad / \quad L \rightarrow (M \leftrightarrow N)$ | 6) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $S \rightarrow L \quad / \quad S \rightarrow (L \vee W)$ |
| 7) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $A \leftrightarrow B$ 2. $C \rightarrow \neg B \quad / \quad A \rightarrow \neg C$ | 8) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $E \rightarrow (F \wedge G)$ 2. $(F \vee H) \rightarrow I \quad / \quad E \rightarrow I$ |
| 9) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D) \quad / \quad \neg A \vee C$ | 10) | <ol style="list-style-type: none"> 1. $M \vee (N \wedge O)$ 2. $M \rightarrow O \quad / \quad O$ |

(4) Решете отново примерите от предишната задача този път като използвате доказателство чрез свеждане до противоречие или условно доказателство.

1.8 Естествена дедукция

- (5)** Докажете валидността на следните аргументи чрез естествена дедукция, като за символното представяне на простите твърдения в тях използвате дадените в скобите букви. Опитайте се да ги решите по два начина – един път без да използвате условно доказателство или доказателство чрез свеждане до противоречие и втори път като използвате някое от тях.¹
- 1) Ако започна новата работа (N), ще трябва да си купя кола (K), а ако отида на море (M), ще изхарча половината от спестяванията си (S). Но ако си купя кола и изхарча половината от спестявания, ще трябва да живея с 10 лева на ден (L). Аз обаче не мога да живея с толкова. Значи или няма да си купя кола, или няма да отида на море.
 - 2) Ако нашият представител се кандидатира за президент (P), то ако направи позитивна кампания (K), ще стигне до балотаж (B). Ако стигне до балотаж и спечели изборите (S), той няма да бъде преизбран след четири години (C). Ако обаче подкрепи смъртното наказание (N), ще спечели изборите и ще бъде преизбран след четири години. Следователно, ако нашият представител се кандидатира за президент, ако направи позитивна кампания, той няма да подкрепи смъртното наказание.
 - 3) Ако лекарят инжектира антителата (L), пациентът ще получи алергична реакция (A), а ако получи алергична реакция, черният му дроб ще спре да функционира (C). Но ако лекарят не инжектира антителата, вирусът ще се разпространи в кръвоносната му система (V). Черният дроб на пациента ще спре да функционира, ако вирусът се разпространи в кръвоносната му система. Ако черният дроб на пациента спре да функционира, той няма да доживее до сутринта (S). Лекарят ще инжектира или няма да инжектира антителата, така че пациентът със сигурност няма да доживее до сутринта.
 - 4) Ако е Нова година (N), Иван пие червено вино (R). Ако празнува с приятели (P), Иван пие бира (B). Следователно, ако празнува Нова година с приятели, Иван пие червено вино и бира.
 - 5) Ако Иван запише старогръцки (S), той ще запише и латински (L). Ако запише старогръцки, то ако запише латински, той ще запише и логика (O). Ако Иван запише старогръцки, ако запише логика, той ще запише и математика (M). Следователно, ако запише старогръцки, Иван ще запише и математика.
 - 6) Ако има икономическа криза (I) или възникнат международни конфликти (K), то ако правителството бездейства (B) или взима неадекватни мерки (M), няма да има нито икономически растеж (R), нито политическа стабилност (P). Ако няма икономически растеж или данъците се повишат (D), ще има протести (N). Следователно, ако има икономическа криза, то ако правителството бездейства, ще има протести.
 - 7) Ако Петър е срещнал Мария (P), той ѝ е казал новината (Z), в случай че я е знаел (K). Но Петър е срещнал Мария и не ѝ е казал новината. Значи не я е знаел.

¹ Повечето от примерите са от задача **(2)** от задачите към „1.7 Бърза проверка за логическо следване“. Там валидността на аргументите трябваше да бъде доказана с бърза проверка. Може да сравните двата метода.

1.8 Естествена дедукция

- 8) Ако започна собствен бизнес (S), ще стана богат (B), а ако започна научна кариера (K), ще имам свободно време (V). Или ще започна собствен бизнес, или ще започна научна кариера. Ако обаче започна собствен бизнес, няма да имам свободно време, докато ако започна научна кариера, няма да съм богат. Следователно ще имам свободно време, ако и само ако не съм богат.
- 9) Ако отида на приема (P), ще трябва да си купя фрак (F). Но ако си купя фрак, няма да мога да си платя наема за месеца (N) и да погася лихвите по заема си (Z). Ако не си платя наема, ще трябва да се крия цял месец от хазяина (K), а аз не мога да направя това. Освен това ще трябва да погася лихвите по заема си. Следователно няма да отида на приема.
- 10) Ако данъците бяха увеличени (D), щеше да се увеличи безработицата (B), а ако чуждите инвестиции бяха намалели (I), щеше да се намали растежа (R). Но ако се беше увеличила безработицата или инвестициите бяха намалели, потреблението щеше да спадне (P). Потреблението обаче не е спаднало. Следователно нито данъците са увеличени, нито чуждите инвестиции са намалели.
- 11) Ако Иван е бил до късно с приятели (K), на другия ден той е махмурлия (S). Ако любимият му отбор е паднал (L), на другия ден той е раздразнителен (R). Следователно, ако Иван е бил до късно с приятели или любимият му отбор е паднал, на другия ден той е махмурлия или е раздразнителен.
- 12) Ако в началото на годината Юпитер е бил под влиянието на Марс (M), през годината ще има война (V) или вътрешни размирици (R). Ако пък тогава Юпитер е бил под влиянието на Сатурн (S), то или годината ще е гладна (G), или ще има война. Война обаче със сигурност няма да има. Следователно, ако годината не е нито гладна, нито има вътрешни размирици, Юпитер не е бил под влиянието нито на Марс, нито на Сатурн.

(6) Използвайте естествена дедукция, за да отговорите на следните въпроси:

- 1) Вие сте в ролята на детектив. Разполагате със следната информация. Има 4-ма заподозрени – да ги наречем „ P “, „ Q “, „ R “ и „ S “. Ако P е невинен, тогава и S е невинен, но вината на R би била несъмнена. Ако S е невинен, тогава Q е сред извършителите на престъплението. Ако S е виновен, тогава е виновен и R . R обаче има сигурно алиби. Кои са виновни и кои – невинни?
- 2) Както предишното, но този път информацията е следната. P е виновен, ако и само ако Q е невинен. R е невинен, ако и само ако S е виновен. Ако S е сред извършителите, то и P е сред тях, и обратно. Ако S е виновен, тогава и Q е виновен.
- 3) В един ресторант един клиент казал на сервитьора следното: „Аз ям картофи или ориз, но не и двете заедно. Ако ям картофи, тогава не ям хляб. Ако ям хляб или не ям картофи, тогава не ям ориз.“ Какво трябва да сервира сервитьорът на клиента?