

3.5 Доказателствена процедура

Задачи към тема „3.5 Доказателствена процедура“

(1) Определете дали следните двойки изрази са логически еквивалентни. Ако не се, променете един от кванторите в първия израз (ако е екзистенциален да стане универсален, и обратно), така че да станат еквивалентни.

- | | |
|---|--|
| 1) $\neg\forall y \exists y \neg$ | 6) $\neg\exists x\forall y\forall z \quad \forall x\exists y\forall z \neg$ |
| 2) $\neg\exists x \neg \quad \neg\neg\forall x$ | 7) $\exists x\exists y\neg\forall z\forall w \neg \quad \exists x\exists y\exists z\exists w$ |
| 3) $\forall x\neg\forall y\forall z \neg \quad \neg\exists x\forall y\neg\forall z$ | 8) $\exists x\exists y\neg\forall z\forall w \neg \quad \neg\forall x\forall y\forall z\neg\forall w$ |
| 4) $\forall x\neg\neg\exists y \neg \quad \neg\exists x\forall y$ | 9) $\exists x\exists y\neg\forall z\forall w \neg \quad \exists x\exists y\exists z\neg\exists w \neg$ |
| 5) $\forall x\neg\forall y\forall z \neg \quad \forall x\exists y\exists z$ | 10) $\exists x\exists y\forall z\forall w \neg \quad \neg\forall x\forall y\forall z\exists w$ |

(2) Правилна ли е инстанцията? Ако не е, къде е грешката?

- | | |
|---|--|
| 1) $\frac{\forall x(Fxa \rightarrow Gbx)}{Fba \rightarrow Gbb}$ | 5) $\frac{\forall y(Gay \vee \neg\forall xHbx)}{Gab \vee \neg\forall xHbx}$ |
| 2) $\frac{\forall z(Faz \wedge \neg Fzz) \rightarrow Fab}{(Fab \wedge \neg Fbb) \rightarrow Fab}$ | 6) $\frac{\neg\forall x(Fxa \leftrightarrow Gax)}{\neg(Fba \leftrightarrow Gab)}$ |
| 3) $\frac{\exists x\exists y\exists z[(Fxa \wedge \neg Fya) \rightarrow Gxyz]}{\exists y\exists z[(Fba \wedge \neg Fya) \rightarrow Gxyz]}$ | 7) $\frac{\exists x\forall yFxy \rightarrow \forall y\exists xFxy}{\forall yFay \rightarrow \forall yFay}$ |
| 4) $\frac{\forall x\exists y[\forall zFzxy \rightarrow \exists zGaz]}{\exists y[\forall zFzay \rightarrow \exists zGaz]}$ | 8) $\frac{\forall x[Fxbx \wedge (\neg\exists yGxy \leftrightarrow Hxbx)]}{Fbbb \wedge (\neg\exists yGby \leftrightarrow Hab)}$ |

(3) Отдолу са дадени части от доказателства, в които има инстанциации. Правилни ли са инстанциациите и ако има грешка, къде е тя?

- | | |
|---|---|
| 1) 1. $\neg\forall xFxx$ 2. $\exists zGzz$ 3. Gaa от 2. по EI 4. $\neg Faa$ от 1. по UI | 4) 1. $\forall xFax$ 2. $\exists x\neg Fax$ 3. Faa от 1. по UI 4. $\neg Fab$ от 2. по EI |
| 2) 1. $\forall xFxa$ 2. $\exists x\neg Gxx$ 3. $\neg Gaa$ от 2. по EI 4. Faa от 1. по UI | 5) 1. $\neg\forall xFax$ 2. $\exists zGbz$ 3. Gba от 2. по EI 4. $\neg Faa$ от 1. по UI |
| 3) 1. $\exists xFxb$ 2. $\forall yGay$ 3. Fbb от 1. по EI 4. Gab от 2. по UI | 6) 1. $\exists x\exists yFxy$ 2. $\forall x\exists yGyx$ 3. $\exists yFay$ от 1. по EI 4. $\exists yGya$ от 2. по UI |

3.5 Доказателствена процедура

(4) Докажете (със средствата на предикатната логика) валидността на следните силогизми:

- | | |
|----------|----------|
| 1) EAE-1 | 4) EIO-2 |
| 2) AEE-2 | 5) EIO-4 |
| 3) OAO-3 | 6) AOO-2 |

(5) Докажете валидността на следните изводи:

- | | |
|---|---|
| 1) $\frac{\forall x(\neg Fx \rightarrow \neg Gx) \quad \forall xGx}{\exists xFx}$ | 4) $\frac{\forall x(Fx \vee Gx) \quad \forall x(Fx \vee \neg Gx)}{\forall xFx}$ |
| 2) $\frac{\forall x(Fx \wedge Gx)}{\forall xFx \vee \forall xGx}$ | 5) $\frac{\exists x(Fx \wedge Gx) \vee \exists x(Fx \wedge \neg Gx)}{\exists xFx}$ |
| 3) $\frac{\exists y \forall x Fyx^1}{\forall x \exists y Fyx}$ | 6) $\frac{\forall x(Fx \rightarrow \forall y \exists z Gxyz) \quad \exists x \forall y \neg Gaxy}{\neg Fa}$ |

(6) Докажете валидността на следните изводи, като използвате означенията:

- | | |
|--|--|
| 1) Нито един човек не е съвършен. Сократ е човек. ----- Сократ не е съвършен. | $F - [1]$ е човек, $G - [1]$ е съвършен, $a -$ Сократ |
| 2) Сократ е философ. Сократ е мъдър. ----- Някой философи са мъдри. | $F - [1]$ е философ, $G - [1]$ е мъдър, $a -$ Сократ |
| 3) Петър или Иван не е учтив. Ако Иван е учтив, всеки е учтив. ----- Иван не е учтив. | $F - [1]$ е учтив, $a -$ Иван, $b -$ Петър, $D -$ хората |
| 4) Иван може да победи всеки от отбора, който е по-възрастен от него. Петър не е по-възрастен от никой от отбора, който може да го победи. ----- Петър не е по-възрастен от Иван. | $F - [1]$ може да победи [2], $G - [1]$ е по-възрастен от [2], $a -$ Иван, $b -$ Петър, $D -$ отбора |

¹ Споменахме този извод в „3.3 Възможностите на езика на предикатната логика“. Предпоставката би могла да бъде „Някой обича всички“, а заключението – „Всеки е обичан от някого“.

3.5 Доказателствена процедура

- 5) Всички тела се привличат.² $F - [1]$ привлича $[2]$, $G - [1]$ е тяло
 a и b са тела.
 b привлича a .
- 6) Всяко нещо или съществува във времето и пространството, или е абстрактно. $F - [1]$ е абстрактно, $G - [1]$ е число, $H - [1]$ съществува във времето и пространството
Числата не съществуват във времето и пространството.
Числата са абстрактни.
- 7) Всеки, който е чел и *Хамлет*, и *Отело*, харесва *Хамлет*. $F - [1]$ е чел *Хамлет*, $G - [1]$ е чел *Отело*, $H - [1]$ харесва *Хамлет*, $D -$ хората
Някои, които са чели *Хамлет*, не го харесват.
Някои, които са чели *Хамлет*, не са чели *Отело*.
- 8) Нито едно гръбначно животно, което има бъбреци, не е земноводно. $F - [1]$ е гръбначно, $G - [1]$ има бъбреци, $H - [1]$ е земноводно, $D -$ животните
Ако едно земноводно има бъбреци, то е гръбначно.
Никое земноводно няма бъбреци.
- 9) На прожекцията се допускат само пълнолетни, които са си купили билет. $F - [1]$ се допуска на прожекцията, $G - [1]$ е пълнолетен, $H - [1]$ си е купил билет, $D -$ хората
Някои, които са си купили билет, са непълнолетни.
Някои, които не се допускат на прожекцията, са си купили билет.
- 10) Всички окръжности са фигури.³ $F - [1]$ е окръжност, $G - [1]$ е фигура, $H - [1]$ чертае $[2]$
Всеки, който чертае окръжност, чертае фигура.
- 11) Има постъпки, които всички хора осъждат. $F - [1]$ е постъпка, $G - [1]$ е човек, $H - [1]$ осъжда $[2]$
Всеки човек осъжда една или друга постъпка.
- 12) Всеки от форума харесва *Амаркорд*. $F - [1]$ е от форума, $G - [1]$ харесва *Амаркорд*, $H - [1]$ е гледал *Амаркорд*, $D -$ хората
Или никой от форума не е гледал *Амаркорд*, или ако някой го е гледал, го харесва.

² Споменахме този извод в „3.3 Възможностите на езика на предикатната логика“.

³ Споменахме този извод в „3.3 Възможностите на езика на предикатната логика“.

3.5 Доказателствена процедура

- 13) Има постъпки, които са осъждани от всеки, който осъжда някакви постъпки.
 Всеки осъжда една или друга постъпка.

 Има постъпки, които всички осъждат.
- F – [1] е постъпка, G – [1] е човек,
 H – [1] осъжда [2]

- 14) Харесвам всеки, който се смее на самия себе си.
 Мразя всеки, който се смее на всичките си приятели.
 Ако мразя някого, аз не го харесвам.

 Ако съществува някой, който се смее на всичките си приятели,
 то съществува някой, който не е приятел на самия себе си.
- F – харесвам [1], G – [1] се смее на [2], H – мразя [1], I – [1] е приятел на [2]

(7) Докажете, че следните формули са логически валидни:

- 1) $\forall x(\forall yFy \rightarrow Fx)$
- 2) $\exists x(\forall yFy \rightarrow Fx)$
- 3) $\forall x(Fx \rightarrow \exists yFy)$
- 4) $\forall x\exists y(\forall zFyzx \rightarrow Fyux)$

(8) Въз основа на разпределимостта на кванторите в конюнкцията или дизюнкцията, определете дали следните двойки формули са логически еквивалентни:

- 1) $\forall x(\neg Fxa \vee Gxb)$ $\forall x\neg Fxa \vee \forall xGxb$
- 2) $\forall x(Fxa \wedge \neg Gax)$ $\forall xFxa \wedge \neg \exists xGax$
- 3) $\exists x(\neg Fxb \vee \neg Gxa)$ $\neg \forall xFbx \wedge \neg \forall xGxz$
- 4) $\exists y(\neg Guyb \wedge \neg Hay)$ $\neg \forall yGuyb \wedge \exists y\neg Hay$

(9) Какви са формалните свойства на следните отношения?

- | | |
|---|--|
| 1) по-малко или равно в множеството на естествените числа | 6) майка в множеството на хората |
| 2) сестра в множеството на хората | 7) по-голямо с 2 в множеството на естествените числа |
| 3) съсед в множеството на хората | 8) харесва в множеството на хората |
| 4) връстник (имащ същата възраст) във множеството на хората | 9) подчинен в една армия |
| 5) учител в множеството на хората | 10) по-богат в множеството на хората |

(10) Докажете че:

- 1) Ако едно отношение е асиметрично, то е също ирефлексивно.
- 2) Ако едно отношение е интранзитивно, то е също ирефлексивно.