

Exercises to 1.3 Truth tables

(1) Is each of the following expressions a well-formed formula?

- | | |
|--|--|
| 1) $\neg(p \wedge \neg q)$ | 7) $[\neg(p) \wedge q] \vee r$ |
| 2) $\neg(\neg r)$ | 8) $\{[(s \rightarrow s) \rightarrow s] \rightarrow s\} \rightarrow s$ |
| 3) $[(q \rightarrow p)] \rightarrow q \wedge r$ | 9) $(q \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow r)$ |
| 4) $[\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow \neg \neg p$ | 10) $q \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow r$ |
| 5) $p \rightarrow (\neg r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg s)$ | 11) $\neg \neg [\neg p \rightarrow (r \vee q)]$ |
| 6) $q \wedge \neg \neg \neg q$ | 12) $p \wedge (q \vee r) \wedge s$ |

(2) Specify the subformulas of each formula.

- | | |
|--|--|
| 1) $(\neg p \wedge r) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$ | 3) $(p \wedge \neg p) \leftrightarrow (r \rightarrow \neg q)$ |
| 2) $[p \wedge (q \vee \neg r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee \neg r]$ | 4) $[(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r] \rightarrow (\neg r \wedge \neg p)$ |

(3) For each of the following formulas, determine whether it is atomic, a negation, a conjunction ... etc.

- | | |
|--|---|
| 1) $\neg[(q \rightarrow p) \wedge r] \wedge p$ | 6) $(\neg \neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ |
| 2) $\neg r \rightarrow s$ | 7) $\neg q \vee (p \rightarrow q)$ |
| 3) $\neg(p \vee q) \wedge \neg(q \vee p)$ | 8) $\neg \neg p \wedge \neg \neg r$ |
| 4) $\neg \neg [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$ | 9) $\neg q \vee \neg(\neg p \wedge q)$ |
| 5) q | 10) $p \wedge \neg[(p \vee q) \rightarrow r]$ |

(4) Construct the truth table of each formula and specify whether it is a tautology, a contradiction, or contingent.

- | | |
|--|---|
| 1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ | 7) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ |
| 2) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ | 8) $(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ |
| 3) $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ | 9) $[(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ |
| 4) $[p \rightarrow (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee q)$ | 10) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(\neg r \vee p) \rightarrow (r \wedge \neg q)]$ |
| 5) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$ | 11) $[(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r] \rightarrow [(p \wedge q) \leftrightarrow r]$ |
| 6) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | 12) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ |

(5) Show with truth tables that the following formulas are tautologies.

- | | |
|--|---|
| 1) $p \vee \neg p$ | 4) $[(p \rightarrow \neg q) \wedge q] \rightarrow \neg p$ |
| 2) $p \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge q)]$ | 5) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ |
| 3) $\{p \vee [(\neg q \vee r) \wedge p]\} \rightarrow (p \vee \neg r)$ | 6) $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$ |